
Ensaio

Do plausível ao provável: um breve ensaio histórico

From plausible to probable: a short historical essay

Evaldo Araújo de Oliveira^{a,✉} e Vicente Pereira de Barros^b

^aInstituto de Astronomia e Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, São Paulo, Brasil; ^bInstituto de Física, USP, São Paulo, São Paulo, Brasil

Resumo

Neste trabalho apresentamos um breve ensaio sobre o desenvolvimento do conceito de probabilidades, enfatizando sua natureza subjetiva. Relatamos a ligação entre as contribuições de Filósofos e Matemáticos na elaboração dos conceitos pertinentes da Teoria das Probabilidades e Estatística. Entendemos que a procura da pergunta que motivou estas pessoas a se debruçarem sobre este tema, ou seja “Como o raciocínio humano funciona?”, nos ajuda a entender melhor o próprio conceito de probabilidade na forma atualmente apresentado nas maiorias dos cursos de graduação em ciências (Biologia, Física, Química, ...) de nossas universidades, bem como a manuseá-lo (aplicar). © Ciências & Cognição 2007; Vol. 11: 184-191.

Palavras-chave: probabilidade subjetiva; ensino; história da ciência.

Abstract

In this paper we present a brief essay on the development of the concept of probabilities, emphasizing its subjective nature. We present links between the contributions of Philosophers and Mathematicians in the elaboration of the pertinent concepts of the theory of the probabilities and statistics. We understand that the search of the question that motivated these people to lean over this subject, in other words “How works the human reasoning?”, helps to get better understand on the concept of probability as is presented in almost courses of graduation in science (Biology, Physics, Chemistry, ...) of our universities, as well as handling it (to apply). © Ciências & Cognição 2007; Vol. 11: 184-191.

Keywords: *subjective probability; teaching; history of science.*

1. Introdução

No ensino superior brasileiro, de forma geral, o estudante de ciências se depara

inúmeras vezes com conceitos envolvendo probabilidades e estatística durante os seus estudos, normalmente nas aulas de laboratório para tratar dados experimentais ou em cursos

✉ - E.A. de Oliveira é Doutor em Ciências (Instituto de Física - USP) e pesquisador do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (USP) vinculado ao projeto FAPESP “Classificação de sistemas precipitantes por meio de sensoriamento remoto e redes neurais artificiais” (05/60141-0). Atualmente colabora como revisor na revista *Journal of Physics A, Mathematical and General*. E-mail para correspondência: evaldo@model.iag.usp.br; V.P. Barros é Mestre em Ciências (Instituto de Física – USP) e Doutorando pelo mesmo Instituto.

sobre física quântica, aprendizagem computacional e epidemiologia. Muitas áreas possuem cursos de graduação com disciplinas de probabilidade e estatística, no entanto, não abordam a perspectiva bayesiana.

Iniciaremos este ensaio com o exemplo do ensino de Física, dentro ensino superior Federal¹ algumas poucas universidades apresentam um curso introdutório de estatística durante a graduação, mas a maioria não apresenta tais conceitos de forma sistematizada. Desta forma, há um consenso dentre os alunos que este tema é apresentado de maneira deficiente durante a formação básica dos físicos.

Este problema já é percebido internacionalmente no ensino de Física (D'Agostini, 1999) D'Agostini argumenta que a principal razão desta insatisfação por parte dos alunos na compreensão da estatística e de suas aplicações é a exposição do conceito de probabilidades que não é apresentado com o devido cuidado. Em seu artigo D'Agostini mostra o conceito de probabilidade em termos da probabilidade subjetiva na qual a teoria bayesiana é baseada, enfatizando que a idéia de probabilidade como um grau de crença sobre a realização de um dado evento não nos leva necessariamente a acreditarmos no que quisermos independente dos dados fornecidos.

Além das tentativas de se definir a probabilidade como limite de frequências relativas não terem sido bem sucedidas (Dantas, 2000), o ensino predominante de tal interpretação gera algumas dificuldades para o manuseio das probabilidades, principalmente em modelagens. Como um simples exemplo, considere o caso de um programa de auditório onde o jogador tem que descobrir em que porta está guardado seu prêmio em apenas uma tentativa. Se existirem três portas, normalmente afirma-se que cada porta "tem probabilidade" igual a um terço (0,333...%) de conter o prêmio. No entanto, suponha que o jogador tenha escolhido a primeira porta e, para aumentar o suspense, o apresentador tenha aberto em seguida a terceira porta que apresentou-se vazia. Qual porta o jogador deveria escolher? Uma vez que a primeira

porta "tem probabilidade" igual a 1/3, então ele poderia pensar que restou 2/3 para a segunda porta?

Se entendermos que a probabilidade é uma característica intrínseca do objeto analisado, então a resposta a última pergunta está longe de ser óbvia.

Em nosso entender, tais dificuldades residem na falta de esclarecimento sobre o conceito de probabilidades que pode ser trabalhada por meio da questão: A princípio, o que se procurava quando a Teoria das Probabilidades foi se estruturando?

Poderíamos começar a pensar em termos da previsão de eventos aleatórios, ou até certo ponto do futuro, como comumente é ensinado (Dantas, 2000). No entanto, uma análise histórica pode nos surpreender.

Mostramos neste artigo que apesar de alguns documentos antigos indicarem uma origem das probabilidades na previsão em jogos de azar, sem dúvida tal idéia teve sua maior motivação na modelagem matemática da forma como a mente humana pensa e toma decisões. Nesta busca, naturalmente a Teoria das Probabilidades e a estatística surgiram e se consolidaram.

O nosso objetivo nesse trabalho não é apresentar uma prova da validade da Teoria Bayesiana, uma vez que existem vários trabalhos que o fazem com rigor e clareza (Cox, 1946; Jaynes, 1988; Bernardo, 2000; Jaynes, 2003). Desejamos apenas apresentar mais informações sobre o desenvolvimento do conceito de probabilidades e sua relação com a modelagem matemática do raciocínio humano, com o intuito de motivar uma exposição mais ampla e intuitiva da Teoria das Probabilidades nos cursos de graduação.

O artigo se organiza da seguinte maneira: na segunda seção apresentamos o desenvolvimento da idéia de modelar o pensamento humano matematicamente, na seção seguinte apresentamos o surgimento da sistematização matemática para a Teoria das Probabilidades, evidenciando alguns trabalhos recentes sobre a mente humana por meio da Teoria Bayesiana e, por fim, concluímos nossa apresentação com uma sugestão para a introdução da Teoria das Probabilidades nos

curso de graduação em ciências visando ampliar e facilitar o uso da mesma pelos estudantes.

2. O desenvolvimento da idéia

A busca pela compreensão do funcionamento da mente humana é quase tão antiga quanto a própria história da humanidade, tanto no sentido de alma, pensamento e emoções², quanto em relação a partes do corpo humano que estariam diretamente relacionados as tais, como a sede do ser.

Embora hoje seja bem conhecido que o cérebro é o órgão pelo qual podemos dizer que a mente age, nem sempre acreditou-se nisso. Por exemplo, os antigos egípcios criam que o coração era o cerne do homem, a essência da vida, bem como a fonte do bem ou mal. Tal pensamento era bastante popular na antiguidade e até defendido por grandes nomes da ciência antiga. No entanto, é necessário esclarecer que provavelmente a palavra “coração” tenha sido anterior à descoberta do próprio órgão chamado *coração* (o coração físico) e referia-se a algo da essência interna do homem (intelecto, vontade e emoções). Como o coração físico é um órgão vital para a vida do homem, é perfeitamente compreensível que tenha sido apelidado por *coração*. O que afirmamos no início do parágrafo é que em várias sociedades, entre estas a egípcia, realmente se acreditava que o coração físico era a moradia da essência do homem.

A mudança do coração para o cérebro como o cerne do homem provavelmente começou no quinto século a.C.. Por volta de 450 a.C., um médico grego, conhecido por *Alcmaneon de Crotona*, baseando-se em seus conhecimentos sobre anatomia animal, concluiu que era o cérebro a sede dos pensamentos e emoções e não o coração. Ainda no mesmo século outros homens (Demócrito, Diógenes, Platão e Teófrasto) atribuíam ao cérebro o comando das atividades corporais, de maneira que cada vez mais não só se dava atenção ao cérebro como se colocava na posição de órgão mais

importante do homem, detentor do seu cerne. Veja por exemplo a excelente declaração feita por Hipócrates (460-379 a.C.), onde ele exalta a função do cérebro no homem (Finger, 1994: 13):

“Deveria ser sabido que ele é a fonte do nosso prazer, alegria, riso e diversão, assim como nosso pesar, dor, ansiedade e lágrimas, e nenhum outro que não o cérebro. É especificamente o órgão que nos habilita a pensar, ver e ouvir, a distinguir o feio do belo, o mau do bom, o prazer do desprazer. É o cérebro também a sede da loucura e do delírio, dos medos e sustos que nos tomam, muitas vezes à noite, mas às vezes também de dia; é onde jaz a causa da insônia e do sonambulismo, dos pensamentos que não ocorrerão, deveres esquecidos e excentricidades.”

Hipócrates

Como pode ser visto tal declaração é bem condizente, ou próxima, dos atributos do cérebro conhecidos hoje. No entanto, ainda havia resistências à retirada do coração como cerne, mesmo tendo a defesa de homens renomados. No quarto século a.C., Aristóteles contrariava tal idéia dizendo que o órgão dos pensamentos e emoções era o coração e que o cérebro era meramente um radiador designado para esfriar o coração, embora também afirmasse que o órgão do pensamento não era a base para o pensamento, pois tal base era imaterial e, portanto, não poderia ser encontrado em nenhum lugar do corpo humano.

Durante os séculos seguintes foram-se acumulando conhecimentos a respeito do coração e do cérebro e a resistência ao cérebro, sendo o cerne do homem, foi caindo lentamente.

No quarto século d.C., Nemésio, bispo de Emesia, relatou em seu livro *Da natureza do homem* que a alma não tinha uma sede, mas as funções da mente sim. Para tanto, entraram em ação os ventrículos cerebrais que seriam os responsáveis pelas operações mentais, desde a sensação até a memorização.

Estes recebiam as informações vindas dos órgãos sensitivos e ali acontecia a análise sensorial. As imagens formadas eram levadas ao ventrículo médio, sede da razão, do pensamento e do juízo. Depois entrava em ação o último ventrículo, sede da memória. Tais ventrículos eram associados a canais por onde circulavam espíritos e assim realizavam as funções do cérebro. Com isso, mais uma vez se diferenciava a alma do raciocínio do homem.

A idéia de espírito nos ventrículos permaneceu por muito tempo e em meados do século XVII d.C., Descartes, filósofo e matemático francês, propôs a idéia que o cérebro funcionava como uma máquina. Ele dizia que os nervos do homem eram cheios de espíritos de animais que levavam informações motoras e sensoriais para os ventrículos do cérebro, à semelhança dos fluidos hidráulicos numa máquina. Assim, Descartes descreveu o cérebro como sendo uma máquina, trazendo com isso uma rica analogia apesar dos controversos espíritos. Embora o conceito do cérebro-máquina tenha permanecido até hoje, no século seguinte a teoria dos espíritos nos ventrículos foi *por água abaixo* com a demonstração da natureza elétrica na condução nervosa, publicada pelo fisiologista italiano Luigi Galvani (séc. XVIII d.C.).

Com o passar dos séculos, as descobertas sobre a fisiologia e funcionamento do cérebro acumularam-se a uma velocidade cada vez maior, acompanhando uma gradual dissociação entre o estudo do “cerne do homem” e o estudo do “raciocínio humano”. Esse acréscimo na velocidade se deu devido ao desenvolvimento paralelo das teorias físicas e suas aplicações na construção de novos equipamentos de pesquisa. O microscópio, construído pela primeira vez em 1595 pelos holandeses Hans e Zacharias Jansen, foi um desses equipamentos fundamentais para o avanço das pesquisas sobre o cérebro e suas funções. Embora tenha sido muito rudimentar nos seus primeiros séculos de “vida”, no século XIX d.C. o microscópio recebeu uma considerável melhoria na sua resolução, impulsionando novas descobertas sobre estruturas internas do cérebro. Uma

consequência notável dessa melhoria foi a descrição das primeiras células neurais, ocorrendo esta na década seguinte à construção do primeiro microscópio acromático. Em consequência, os cientistas ficaram maravilhados com a rede fina e extremamente complexa de processos filamentosos que parecia tomar por completo o sistema nervoso. Qual seria a função desses processos filamentosos? Teria realmente alguma relação com o raciocínio (isto quer dizer, a rede de filamentos interna ao cérebro.)? Apesar dos cientistas não terem imediatamente tais respostas, eles tinham certeza da importância de tal rede para a compreensão do funcionamento do cérebro. Finalmente, em 1863, Otto Deiters obteve imagens claras e completas sobre os neurônios, isolando-os sob o microscópio. Daí surgiu o conhecimento da divisão estrutural do neurônio: *soma* (corpo celular), axônio e dendritos; reconhecida ainda nos dias de hoje.

Os avanços nos equipamentos e técnicas não pararam, de forma que no início do século XX d.C. já era bem aceito que todas as funções cerebrais eram resultantes da intensa transmissão de mensagens elétricas (e/ou neurotransmissores) pela gigantesca rede de neurônios do cérebro. Logo, o mais recente alvo era decifrar a linguagem dos *impulsos nervosos* que já se sabia serem “tudo ou nada”, ou de uma forma mais ampla, lidar com a questão: *seria possível modelar o raciocínio humano?*

As teorias e ferramentas criadas para responder a pergunta do parágrafo anterior, na verdade, foram criadas e desenvolvidas muito antes da descoberta da rede de neurônios do cérebro. A discussão sobre o que seria o raciocínio e como funcionaria, ou como construí-lo, aparentemente seguiu o mesmo caminho grego-renascentista. Como mencionamos, o estudo do raciocínio humano começou a se diferenciar do estudo do pensamento ou alma do homem no início do primeiro milênio d.C., o que, em nossa opinião, contribuiu fortemente para o desenvolvimento da compreensão do raciocínio, escapando de questões intratáveis.

Apesar dos conceitos sobre mente, pensamento e raciocínio já terem sido bastante discutidos até o primeiro milênio d.C., a estruturação e elaboração destes numa forma mais precisa só foi realizada no século XVII d.C. com Descartes. Além de comparar o cérebro com uma máquina, Descartes também estruturou, ou melhor, organizou e elaborou, “o conhecimento do conhecimento humano” --- como este funcionaria. Seus trabalhos sobre a estruturação do conhecimento tiveram um grande impacto na ciência, não só com relação à estrutura do raciocínio humano mas principalmente ao desenvolvimento do método da ciência. Além disso, Descartes também defendia que a matemática era uma linguagem comum da mente, princípio tal cada vez mais popular. Nessa direção, aproximadamente dois séculos depois, George Boole construiu uma álgebra binária (hoje conhecida por álgebra booleana) que representaria as “leis do pensamento”³, revolucionando mais uma vez a teoria do raciocínio. Boole (1854) tinha uma clara compreensão da magnitude do seu trabalho, o que era evidenciado tanto por seu próprio título quanto pela própria elucidação do seu objetivo --- veja a citação abaixo:

“O motivo do presente tratado é investigar as leis fundamentais do funcionamento do cérebro através das quais o raciocínio se realiza; expressá-las através da linguagem do cálculo e, sobre este fundamento, estruturar a ciência da lógica e construir o seu método; fazer deste método a base de todos os métodos para aplicação da doutrina matemática das probabilidades; e, finalmente, recolher dos vários elementos verdadeiros trazidos para serem examinados no curso destas investigações alguma provável sugestão a respeito da natureza e constituição da mente humana.” (Boole, 1854: 1).

No entanto, as *Leis do Pensamento* não foram bem recebidas, na verdade, podemos dizer que foram negligenciadas. A razão para tal não parece muito clara, mas

talvez tenha ocorrido devido aos pesquisadores estarem procurando uma alternativa para a Teoria das Probabilidades apresentada no início do século XIX d.C.

Apesar da Teoria das Probabilidades já estar razoavelmente desenvolvida, principal-mente devido a Bernoulli (séc. XVIII d.C.), Thomas Bayes (séc. XVIII d.C.) e posteriormente Laplace (séc. XIX d.C.), ainda existiam algumas lacunas entre as idéias conceituais das probabilidades e o que se esperava de uma teoria matemática “rigorosa”. Na teoria proposta por Bayes em *An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, a probabilidade representava um “grau de crença”, ou seja, o quanto se pensava ser alguma coisa verdadeira baseando-se na evidência disponível. Isto causava um certo desconforto para quantificar e operar crenças, ou seja, pensamentos. Apesar de Laplace ter desenvolvido analiticamente as idéias apresentadas por Bernoulli⁴, reforçando o trabalho de Bayes, ainda havia muita desconfiança e indisposição por parte da maioria dos matemáticos e físicos (se não maioria, com certeza os mais influentes) para tal teoria. A principal crítica era que o conceito de probabilidade apresentado era muito vago e subjetivo para ser base de uma teoria matemática. Assim, no século XX d.C. houve um grande esforço para “consertar” as probabilidades e por fim acabaram definindo uma nova probabilidade que representava a frequência relativa de um evento numa repetição de grandes conjuntos de amostragem. Com esse novo conceito de probabilidade, aparentemente ganhou-se mais objetividade na teoria, uma vez que “frequências” podem ser medidas. No entanto, com isso limitou-se consideravelmente o espaço da validade ou aplicações das probabilidades.

Assim, mesmo com a visível riqueza da proposta Bayesiana, bem como sua correspondência qualitativa com o senso comum, a abordagem frequencista foi gradualmente ganhando espaço frente à Bayesiana. Essa tendência era grandemente facilitada pela falta de argumentação

matemática sobre a adoção das regras de inferência obtidas a partir da proposta de Bayes sob algum critério de otimização⁵. Já o trabalho de Boole não abordava diretamente essas questões na Teoria das Probabilidades, de forma a se manter neutro, embora viesse a ser fundamental para a construção dos processadores artificiais - que são utilizados nos nossos computadores.

O problema da abordagem freqüencista para a construção de processadores de informações é que nem sempre trabalhamos com a inferência de variáveis aleatórias, principalmente nas decisões tomadas no dia-a-dia. Posto isso, terminamos essa seção com a reapresentação da pergunta: seria possível construir uma teoria matemática para modelar o pensamento humano, ou melhor, *seria possível conciliar a Teoria das Probabilidades, inferência e lógica com o raciocínio humano?*

3. A resposta Bayesiana

O século XX d.C. começou então com o grande desafio de construir uma teoria que funcionasse qualitativamente como o cérebro, ou seja, que processasse as informações numa maneira semelhante. Após praticamente um século de análise e discussão sobre o conjunto ou espaço de ferramentas adequadas para a construção de tal teoria, já tinha-se a convicção que a Teoria das Probabilidades era a resposta procurada, de maneira que bastava dar uma boa fundamentação matemática e conceitual, relacionando-a com a lógica simbólica.

Embora a linha ortodoxa tivesse grandes dificuldades em lidar conceitualmente com a inferência de variáveis que não fossem aleatórias, ela teve o seu auge com os trabalhos de Andrey Kolmogorov. O trabalho apresentado por Kolmogorov na verdade não precisava, ou partia, do conceito de freqüência de eventos, mas simplesmente dos trabalhos de Emile Borel sobre teoria da medida e dos conjuntos. Em seu livro *Fundamentos do cálculo de probabilidades*⁶, ele apresentou o sistema axiomático para a Teoria das Probabilidades baseado na teoria

da medida e dos conjuntos, fundamentando matematicamente e definindo as regras necessárias para trabalhar-se com probabilidades. O impacto de tal trabalho foi tanto que logo se tornou referência e formulação básica para a Teoria das Probabilidades. Assim, aparentemente o problema estava resolvido. A partir de um conjunto de axiomas dado arbitrariamente, definiam-se as regras pelas quais as probabilidades deveriam ser tratadas (regra da soma, produto, ...), enquanto o tratamento lógico de proposições (as operações realizadas) era substituído pelas operações de conjunto no espaço dos pontos referentes às proposições. Porém, a dificuldade conceitual, apesar de atenuada, ainda persistia.

Alguns anos após o trabalho de Kolmogorov, Richard Cox (Cox, 1946) demonstrou que também era possível construir uma teoria fundamentada matematicamente a partir da proposta de Laplace, obtendo-se as regras de Kolmogorov por consequência. Além disso, a arbitrariedade dos axiomas de Kolmogorov era substituída por critérios de consistência e qualitativa correspondência com o raciocínio humano (Jaynes, 1988). Mas será que era só isso? Apenas uma maneira alternativa de se reobter as regras de Kolmogorov? Não!

Desde a última década, observa-se um crescimento significativo do número de publicações de trabalhos que utilizam uma abordagem bayesiana. Isso não se deve propriamente a um modismo, mas aos ótimos resultados obtidos. Além disso, como a própria Teoria Bayesiana engloba a freqüencista (Jaynes, 2003; Bernardo, 2000), sempre teremos em geral uma qualidade no mínimo semelhante à obtida pela modelagem ortodoxa (definimos como estatística e probabilidade ortodoxas aquelas oriundas da teoria freqüencista), quando for bem aplicada.

A Teoria Bayesiana traz consigo um conjunto de princípios de otimização que foram desenvolvidos e estabelecidos por caminhos independentes da Teoria das Probabilidades, mas que são cruciais para um bom tratamento de dados e modelagens em geral (de Oliveira, 2005). Dentre esses

princípios encontram-se a maximização da entropia, os reguladores de Tikhonov e o princípio de Ockham. A realização natural de tais princípios pela Teoria Bayesiana é um dos seus grandes trunfos. Para aqueles que desejarem conhecer mais sobre tais assuntos sugerimos as referências: (Jaynes, 1982) para entropia máxima; (Tikhonov, 1977; Kirsch, 1996) para reguladores e (Jeffreys, 1992) para o princípio de Ockham.

Sua aplicação se estende desde a construção de algoritmos de aprendizagem em inteligência artificial (Mitchell, 1997) até o uso para modelagens em neurociência (Weiss, 2002; Stocker, 2006). Devido a isso, sua importância já tem sido observada por Renomeados físicos. Por exemplo, Phillip Anderson (1992: 9)⁷ comenta a grandeza da Teoria Bayesiana e o desejo do seu ensino aos físicos:

“... Estatística Bayesiana é agora ensinada a estudantes de Estatística em cursos avançado. Infelizmente, contudo, ela não é ensinada a nutricionistas ou até mesmo a físicos experimentais.”

A referência (Weiss, 2002) é um excelente exemplo de como a abordagem Bayesiana está transformando a percepção da pesquisa, fornecendo uma estrutura matemática rigorosa para a representação de propriedades físicas e estatísticas do ambiente ao nosso redor. Nesse trabalho por meio de conceitos Bayesianos os autores descrevem as tarefas que sistemas de percepção tentam realizar e obtêm teorias computacionais para a realização de tais tarefas, dando propriedades do ambiente e custos e benefícios associados com diferentes decisões de percepção. Assim, mesmo no amplo contexto biológico da plasticidade e aprendizagem, a Teoria Bayesiana tem mostrado a sua eficiência com ótimos resultados.

4. Comentários finais

Após esse breve ensaio podemos perceber que é possível ver a Teoria das Probabilidades sob a motivação da modela-

gem do raciocínio humano a semelhança da lógica aristotélica por meio da álgebra booleana. Além disso, observa-se também que o uso de um conceito mais geral de probabilidades tem levado a grandes desenvolvimentos em várias áreas da ciência, obtendo uma maior evidência nas pesquisas em inteligência artificial (Korb, 2003).

Apesar de reconhecermos que ainda existe uma parcela considerável de profissionais que não se agradam da Teoria Bayesiana, devido a diferentes linhas filosóficas de pensamento (Bunge, 2006), acreditamos que seria altamente instrutivo para o estudante de ciências ter a oportunidade de conhecer outras abordagens e assim ter acesso a ferramentas que são largamente utilizadas na área de aprendizagem computacional (inteligência artificial) e que começa a ser usada por vários autores em artigos sobre Física Quântica (Hradil, 1996; Schack, 2001; Neri, 2005).

Acreditamos que uma boa maneira de remediar a insatisfação dos estudantes é o fornecimento de motivação aqui apresentada aliado, é claro, a uma exposição cuidadosa e clara sobre os fundamentos matemáticos envolvidos, bem como uma revisão histórica de ambos.

A nossa proposta é não apresentarmos apenas uma abordagem ortodoxa nos cursos da graduação, mas introduzirmos o conceito de probabilidades por meio de uma abordagem mais ampla a semelhança de Jaynes (1988). Assim, seria gasto uma ou duas aulas sobre o desenvolvimento histórico das ferramentas e conceitos envolvidos, enfatizando a motivação do estudo do raciocínio humano (apresentada aqui) e mais algumas aulas desenvolvendo a álgebra, ou regra de operações, da Teoria das Probabilidades e os demais assuntos envolvidos por diante.

5. Referências bibliográficas

Anderson, P.W. (1992). The Reverend Thomas Bayes, Needles in Haystacks, and the Fifth Force. *Physics Today*, 45, 9-11.

- Bernado, J.M. e Smith, A.F.M. (2000). *Bayesian theory*. John Wiley & Sons.
- Boole, G; (1854). *An Investigation of the Laws of Thought: On Which Are Founded The Mathematical Theories Of Logic And Probabilities*. Kessinger Publishing.
- Bunge, M. (2006). *Chasing reality: strife over realism*. Toronto: University of Toronto Press.
- Cox, R.T. (1946) Probability, frequency and reasonable expectation. *Am. J. Phys.*, 14, 1-13.
- D'Agostini , G. (1999). Teaching statistics in the physics curriculum: Unifying and clarifying role of subjective probability. *Am. J. Phys.*, 67, 1260-1268.
- Dantas, C.A.B. (2000). *Probabilidades, um curso introdutório*. São Paulo: EDUSP.
- Finger, S. (1994) *Origins of neuroscience, a history of explorations into brain function*. Oxford: Oxford University Press.
- Hradil, Z.; Myska, R. e Perina, J. (1996). Quantum Phase in Interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 76, 4295-4298.
- Jaynes, E.T. (1982). On the rationale of maximum-entropy methods. *Proceed. IEEE*, 70, 939-952.
- Jaynes, E.T. (1988). How does the brain do plausible reasoning? *Maximum-Entropy Bayesian Methods Sci. Eng.*, 1, 1-24.
- Jaynes, E.T. (2003). *Probability theory: the logic of science*. Bretthorst, G.L. (Ed.). Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press.
- Jefferys, W.H. e Berger, J.O. (1992). Ockham's razor and bayesian analysis. *Am. Scient.*, 80, 64-72.
- Kirsh, A. (1996). *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Springer-Verlag.
- Korb, K.B. (2003). *Bayesian Artificial Intelligence*. London: Chapman & Hall/CRC.
- Mitchell, T. M. (1997) *Machine learning*. Toronto: McGraw-Hill.
- Neri, F. (2005). Quantum Bayesian methods and subsequent measurements. *Phys. Rev. Am.*, 72, 062306.
- de Oliveira, E.A. (2005). *Aprendizagem de conceitos não-estacionários por meio de redes neurais artificiais*. 2005. Tese de doutorado, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, SP.
- Schack, R. ; Brun, T.A. e Caves, C.M. (2001). Quantum Bayes rule. *Phys. Rev. A*, 64, 014305..
- Stocker, A.A. e Simoncelli, E.P. (2006). Noise characteristics and prior expectations in human visual speed perception. *Nat. Neurosci.*, 9, 578-585.
- Tikhonov, A.N. e Arsenin, V.Y. (1977) *Solutions of ill-posed problem*. New York: Winston.
- Weiss, Y.; Simoncelli, E. P.; Adelson, E. H. (2002). Motion illusions as optimal percepts. *Nat. Neurosci.*, 5, 598-604.

Notas

- (1) Numa rápida pesquisa nos currículos apresentados na internet de três conhecidas universidades federais do sudeste brasileiro, encontra-se que apenas uma apresenta um curso de estatística em sua grade curricular, sendo o mesmo um curso optativo para as carreiras de bacharelado e licenciatura em Física.
- (2) Ou estados da alma (alegria, tristeza, raiva,...).
- (3) Abreviação do título: *Uma Investigação das Leis do Pensamento, em que se Fundamentam as Teorias Matemáticas da Lógica e Probabilidades*. Trabalho publicado por G. Boole em 1854.
- (4) Expressadas no livro “A arte da conjectura”, publicado por Bernoulli em 1713.
- (5) Perceba que estamos falando das regras utilizadas num processo de inferência e não dos resultados obtidos. Até porque a boa qualidade da inferência bayesiana é bem conhecida desde a época de Laplace, quando ele estimou a massa de Saturno.
- (6) Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, publicado por Kolmogorov em 1933 na Alemanha.
- (7) Prêmio nobel em Física em 1977.