Ciências & Cognição 2014; Vol 19(3) 368-383 <http://www.cienciasecognicao.org>
Submetido em 26/10/2013 | Revisado em 15/12/2014 | Aceito em 20/12/2014 | ISSN 1806-5821 – Publicado on line em 01/12/2014

Planificação e área total de paralelepípedo: análise das representações semióticas de alunos do ensino básico

Planning and total area of parallelepiped: analysis of semiotic representations by elementary and high school students

Odaléa Aparecida Viana

Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Campus do Pontal, Ituiutaba, MG, Brasil.

Resumo

O trabalho analisou as representações semióticas produzidas por alunos do ensino fundamental e médio em duas situações: na tarefa de planificação do paralelepípedo e na primeira fase de solução de um problema envolvendo a área total do paralelepípedo. Fundamentou-se nas teorias de Raymond Duval sobre registros de representação semiótica e de Stephen Kosslyn acerca da formação e manipulação de imagens mentais. Foram sujeitos 842 estudantes com idades variando entre 14 e 18 anos, do nono ano do ensino fundamental e da terceira série do ensino médio de municípios pertencentes à região do Pontal do Triângulo Mineiro de Minas Gerais. Testes estatísticos mostraram que os sujeitos que produziram fracas representações para a planificação não produziram representações para o problema e, quando o fizeram, valeram-se de figuras planas; já os sujeitos que elaboraram boas planificações tenderam a utilizar, para o problema, mais figuras em perspectiva que planas. No geral, os sujeitos não transferiram as representações da planificação para a solução do problema.

Palavras-chave: ensino de geometria; psicologia da educação matemática; imagens mentais; registros de representação semiótica

Abstract

This study analyzed semiotic representations produced by students from middle and high school in two situations: the task of planning the parallelepiped and the first stage of solving a problem involving the total area of the parallelepiped. It was based on Raymond Duval's theory of semiotic representation registers and on Stephen Kosslyn's computational theory of mental images formation and manipulation. The subjects were 842 students aged between 14 and 18 from ninth grade of middle school and third grade of high school in towns situated in the area of Pontal of Triângulo Mineiro, in Minas Gerais. Statistical tests showed that subjects who made low representations for the planning did not make any representation to the problem, and when they did it, they used flat figures, whereas subjects who developed good plans tended to use more figures in perspective than flat ones. Overall, the subjects did not transfer the planning representations to the solution of the problem.

Keywords: *geometry teaching; psychology of mathematics education; mental images; registers of semiotic representation.*

Autores de Correspondência:
O. A. Viana - Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, Rua 20, nº 1600, Bairro Tupã, Ituiutaba, MG, Brasil. CEP 38.304-402.
E-mail para correspondência : odalea@pontal.ufu.br

1. Introdução

Conceitos e procedimentos relativos à geometria espacial estão inseridos, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino fundamental (Brasil, 1998), em dois blocos de conteúdo. O primeiro trata das formas tridimensionais mais comuns, como paralelepípedos, prismas, pirâmides, cilindros, etc., em que se sugere a exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais, desde as séries iniciais. Ao final do ensino fundamental, espera-se que o aluno estabeleça relações entre figuras espaciais e suas representações planas, observe figuras sob diferentes pontos de vista e descreva algumas características com nomenclatura própria. Essas ações estariam relacionadas ao chamado pensamento geométrico, conforme denominação dada pelos PCN. Já a competência métrica relativa à geometria espacial se caracteriza, de acordo com o documento, por outros saberes, como obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas).

Nessa linha de trabalho, espera-se que, ao final do ensino médio, o aluno analise propriedades relativas aos poliedros e aos corpos redondos, saiba interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais – como projeções, planificações, cortes e desenhos – e também utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais (Brasil, 2000, 2002).

Apesar das indicações para se desenvolver um trabalho com a geometria espacial desde os anos iniciais, pesquisas mostram que a formação conceitual e o desenvolvimento de habilidades nessa área não acontecem de maneira adequada. Isto se verifica quando são analisados os desempenhos de alunos do ensino básico e também daqueles estudantes de cursos de formação de professores em tarefas nas quais se requer o conhecimento da geometria espacial elementar (Proença, 2008; Proença & Pirola, 2009; Viana, 2010).

Entre as inúmeras possibilidades de buscar compreender as dificuldades apresentadas por estudantes na aprendizagem da geometria espacial, optou-se por focalizar alguns aspectos referentes à planificação de figuras geométricas espaciais e ao cálculo da área total dessas figuras em uma situação problema. Especificamente, buscou-se compreender as representações produzidas por estudantes nas referidas tarefas envolvendo a figura do paralelepípedo – um dos conceitos mais trabalhados no ensino básico. Ambas as situações, ou seja, a solução de problemas e as tarefas de planificação de figuras geométricas espaciais, permitem que os estudantes representem, na forma de desenhos no papel, as imagens mentais visuais formadas, inspecionadas e modificadas durante os respectivos processos. Viana (2005; 2012) analisou essas representações com base na psicologia cognitiva, em especial na teoria computacional de Kosslyn (1995) acerca da percepção e da formação de imagens visuais, tendo encontrado diferentes níveis, tipos e funções associados aos registros produzidos por estudantes.

Os desenhos utilizados por alunos em tarefas de geometria também podem ser interpretados com base nos pressupostos de Duval (2009; 2011; 2012) sobre representações semióticas. Nesta perspectiva, a atividade cognitiva dos alunos do ensino básico, quando aprendem geometria espacial, estaria atrelada a um sistema próprio de representações semióticas, no qual constam figuras, números, fórmulas etc. Estas não seriam apenas um meio de exteriorizar as imagens mentais, mas sim elementos essenciais ao pensamento matemático.

É vasta, no Brasil, a literatura que trata de questões ligadas ao ensino e aprendizagem da geometria (Costa & Pavanello, 2010; Lamonato & Passos, 2009; Nacarato & Passos, 2003, entre outros). Alguns trabalhos ligados à psicologia da educação matemática[1] tratam da formação conceitual (Proença & Pirola, 2011) e das habilidades na solução de problemas de geometria (Dobarro & Brito, 2010) ou em tarefas de planificação de sólidos geométricos (Viana, 2000; 2008). Outros analisam registros semióticos produzidos por alunos e ponderam sobre a importância das representações na aprendizagem da geometria (Almouloud, 2011; Flores & Moretti, 2006; Kaleff, 2007; Moretti, 2011).

Na literatura internacional, estudos sobre formação de imagens mentais e a relação entre raciocínio espacial e desempenho em geometria (Battista & Clements, 1991, 1996; Clements & Battista,1992) são citados em boa parte dos trabalhos mais recentes neste tema (Pittalis & Christou, 2010); em alguns, a teoria dos registros de representação semiótica é utilizada na análise qualitativa das produções advindas de atividades de geometria (Elia & Evangelou, 2013; Kalogirou, Elia & Gagatsis, 2013; Tatsis & Moutsios-Rentzos, 2013).

A revisão dos trabalhos não indicou pesquisas que estudassem as representações utilizadas por estudantes na solução de problemas envolvendo a área total de paralelepípedos. O cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros) está previsto para os anos finais do ensino fundamental e para o ensino médio e fazem parte da competência métrica prevista pelos PCN (Brasil, 1998).

Além de presentes no cotidiano das aulas de geometria, problemas que requerem o cálculo da área total de paralelepípedos podem ser vistos em questões de provas para avaliação oficial em larga escala Brasil (2008, 2009), Espírito Santo (s/d), Minas Gerais (2009), Rio de Janeiro (2008), São Paulo (2009). A Figura 1 exemplifica uma questão desse tipo.

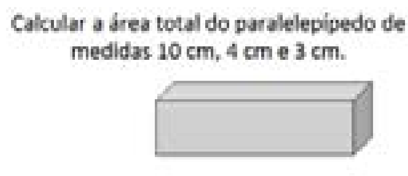

Figura 1. Questão sobre área total de paralelepípedo

Para resolver a questão apresentada podem ser empregadas, ao menos, duas estratégias distintas: (a) aplicação da fórmula $A_t = 2\ (ab+bc+ad)$, em que A_T é a área total, *a, b* e *c* são as medidas do paralelepípedo e (b) decomposição do paralelepípedo em seis faces retangulares, cálculo das áreas de cada retângulo e soma das áreas obtidas. Nas duas situações, é possível empregar registros distintos, alguns pictóricos (desenho do paralelepípedo em perspectiva, desenho dos retângulos, planificação) e outros não pictóricos (registros de números, medidas, fórmulas, palavras, expressões numéricas etc.). Nesse trabalho, pretende-se focalizar as representações pictóricas, que também serão chamadas de representações semióticas figurais ou representações figurais.

Considera-se, por hipótese, que as duas estratégias de solução (a) e (b) citadas requeiram processos mentais distintos e que podem ser estudados, ao menos em parte, por meio da análise das representações utilizadas pelos alunos quando solucionam a questão.

A experiência permite afirmar que a solução (a) tende a ser a mais utilizada nas aulas pelos professores e que os desenhos de planificação – que são muito comuns no ensino básico – não seriam "transferidos" ou "convertidos" para o processo de solução do problema apresentado, o que implicaria na não utilização da solução (b).

Assim, houve inquietação por tentar analisar as representações semióticas produzidas por estudantes do ensino fundamental e do médio quando solucionam um problema envolvendo a área total de um paralelepípedo. Além disso, questionou-se se seria possível comparar estes registros com aqueles elaborados na tarefa de planificação da mesma figura e se haveria diferenças quanto ao nível de ensino dos participantes.

Diante do exposto, foram formuladas algumas questões, a serem estudadas junto a alunos do ensino básico, descritas a seguir:

- Que representações semióticas figurais são produzidas e identificadas:
  a) na tarefa de planificação do paralelepípedo?
  b) na solução de problema envolvendo área total do paralelepípedo?
- Há relação entre as representações produzidas nessas duas situações investigativas?
- Há diferenças de representações de acordo com o nível de ensino desses estudantes (fundamental e médio)?

2. As representações mentais, as imagens mentais e as representações semióticas

Várias atividades e tarefas que são desempenhadas pelos estudantes quando aprendem geometria espacial demandam ações com figuras geométricas e isto implica na habilidade de formar imagens mentais, manter essas imagens, inspecioná-las, acrescentá-las, modificá-las e relacioná-las com outras figuras. Esses processos parecem estar relacionados ao que Duval (2012) chama de apreensão operatória de uma figura, que contemplaria algumas modificações (modificação mereológica – a figura pode separar-se em partes que são subfiguras da figura dada, fracionandose e reagrupando-se; modificação ótica – consiste em aumentar, diminuir, deformar a figura inicial e modificação posicional – o deslocamento da figura em relação a um referencial).

No entanto, buscar entender essas imagens por meio dos registros de representação evidenciáveis nas tarefas de geometria é esbarrar em um dos grandes desafios para os psicólogos cognitivos: entender como as pessoas representam o conhecimento, isto é, como se processam as atividades cognitivas na manipulação do conhecimento representado mentalmente. As representações mentais, de acordo com Sternberg (2000), são as maneiras pelas quais o indivíduo torna presentes no pensamento alguns aspectos, quer sejam estes externos e relativos ao meio ambiente, quer sejam pertencentes ao seu próprio mundo imaginário.

Entre várias teorias que buscam explicar as representações mentais, pode-se citar a hipótese da codificação dupla (ou código dual), sustentada por autores como Allan Paivio (Paivio, 1969). Para este autor, as representações mentais são códigos que podem ser analógicos para os estímulos físicos (representações analógicas ou imagens mentais) e simbólicos para palavras (representações proposicionais); nesta perspectiva existiriam, portanto, dois sistemas básicos distintos de codificação da informação.

Mais preocupados com a natureza das imagens e não com a distinção entre códigos (verbais e não verbais), estão os teóricos da equivalência funcional [2]. Entre eles, destaca-se Stephen Kosslyn. O autor fez uma síntese de algumas teorias sobre a representação mental, considerando que a forma proposicional e a forma de imagens influenciam a maneira de representar o conhecimento, mas não propôs dois sistemas de representação (um sistema verbal e um sistema não verbal). Em vez disso, propôs um sistema que explica a formação de imagens baseado em processos de codificação, de memória e de busca de significado conceitual. Com base em aspectos neurológicos, apresentou um modelo para explicar como o organismo processa as informações visuais por meio de certas áreas do cérebro e de suas conexões.

Uma das primeiras preocupações de Kosslyn (1995) foi explicar a percepção visual como um conjunto de processos através dos quais as sensações recebidas são reconhecidas, organizadas e entendidas. O processamento pode ser mais simples (usado para reconhecer objetos) ou mais complexo (para identificar objetos). No último caso, a identificação de objetos envolveria cinco classes de habilidades: de reconhecer diferentes localizações (posições e distâncias); de generalizar e de identificar objetos a partir de diferentes pontos de vista, da alteração das formas das partes, da variação das relações espaciais entre as partes, da existência de características opcionais e condições não ideais.

O modelo proposto por Kosslyn (1995) indicou a existência de sete subsistemas usados para explicar a arquitetura inata que permitiria ao homem reconhecer o mundo através da visão. Um indivíduo perceberia um objeto, ou seja, um estímulo visual, utilizando esses subsistemas que são mostrados resumidamente na Figura 2.

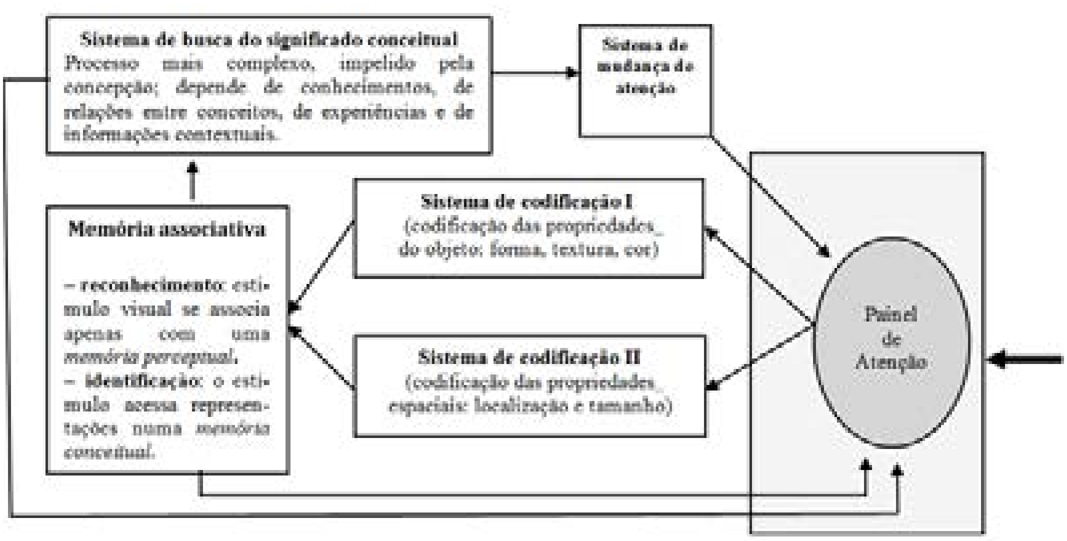

Figura 2. O modelo de Kosslyn para percepção (adaptado de Kosslyn, 1995)

O modelo deve ser lido da direita para a esquerda e de acordo com a figura: os estímulos sobre os olhos produzem uma configuração da atividade em um conjunto de áreas visuais organizadas na região cerebral chamada de lobo occipital. Essas áreas se agrupam dentro de uma única estrutura funcional denominada de campo visual.

O painel de atenção seleciona, no campo visual, um conjunto de pontos para processamento detalhado. É o que acontece quando se quer identificar um determinado objeto em um contexto ou uma determinada parte de um objeto. O conteúdo desse painel é então enviado para dois sistemas maiores para posterior processamento.

A codificação das propriedades e a codificação das relações espaciais são processadas em dois sistemas distintos: o sistema de codificação I e o sistema de codificação II. Por exemplo, quando os contornos dos objetos a serem identificados não estão nítidos, quando partes dos objetos são omitidas ou aparecem desconectadas ou embaralhadas, então esses dois sistemas de codificação ajudam a organizar o estímulo. O sistema de codificação I é um conjunto de áreas do cérebro localizadas a partir do lobo occipital até o lobo temporal inferior. As células dessa área respondem especificamente a propriedades do objeto como forma, textura, cor. Já o sistema de codificação II corresponde a um grupo de áreas cerebrais localizadas do lobo occipital superior para o lobo parietal e permite processar propriedades espaciais como localização e tamanho dos objetos.

No reconhecimento de objetos, o estímulo visual se associa apenas com uma representação na memória perceptual. Para identificação, o estímulo acessa representações armazenadas na memória conceitual e, assim, a pessoa pode ter acesso ao conhecimento mais amplo do objeto. Os dois sistemas de codificação I e II ajudam a organizar o estímulo que permite acessar a memória associativa.

Na memória associativa, que é um sistema parcialmente localizado nos lobos temporal superior e posterior, as respostas dos dois sistemas são associadas à informação armazenada. Essa informação pode ser uma associação simples entre representações, mas pode ser mais conceitual e abstrata; se a informação acessada foi apropriada, então o objeto é identificado.

Em muitas circunstâncias, o estímulo não se associa muito bem à memória visual e o objeto não é reconhecido de imediato. É preciso, então, que a pessoa procure ativamente novos dados em um processamento mais complexo, impelido pelos significados referentes ao conceito (e não pelo estímulo), isto é, dependente de conhecimentos, de experiências e de informações contextuais. Existem evidências que o córtex pré-frontal dorso lateral tenha papel importante no processo.

Por vezes, para identificar o objeto, são necessários mecanismos que mudam a atenção para localizar uma determinada parte informativa ou característica do objeto. Assim, muda-se o painel de atenção e novas representações dos objetos e das propriedades espaciais são organizadas e o processo se reinicia. Acrescenta-se que nessa pesquisa entram em jogo as expectativas do sujeito, suas crenças e a influência do contexto.

Assim, processos complexos influenciariam todo o processamento do estímulo visual, tendo efeito forte e persuasivo na percepção como um todo. Trazendo essa concepção teórica para o caso da geometria, pode-se considerar, por exemplo, que os conceitos já formados pelo aluno influenciariam na forma como ele percebe um objeto ou figura. Concorda-se com a definição de Duval (2011) acerca da apreensão perceptiva de uma figura como sendo a mais imediata das apreensões, ou seja, aquela que permite identificar ou reconhecer, imediatamente, uma forma, ou um objeto, seja no plano, seja no espaço.

Quanto à imagem mental, Kosslyn (1995) afirma que uma imagem mental visual é um tipo de ativação do campo de visão que pode não ser causada por estímulo sensorial imediato: isso fez o autor defender a hipótese de que a imagem mental visual e a percepção visual compartilham os mesmos mecanismos ilustrados na Figura 2. Assim, os componentes do modelo que explicam a percepção também explicariam os processos de geração e de manipulação de imagens mentais.

Trazendo esse modelo teórico para o contexto de uma aula de geometria, pode-se tentar compreender como se processam as imagens mentais do aluno em uma tarefa que solicite, por exemplo, responder “quantas arestas tem um paralelepípedo?”, sem que o objeto que representa esse conceito seja percebido visualmente. É bem provável que o aluno "olhe" para a imagem – produzida por um processamento que conta com subsistemas ligados à identificação (em que são acessadas representações numa memória conceitual) e à busca conceitual (processo mais complexo, impelido pela concepção, dependente de conhecimentos, experiências e de informações contextuais) – para responder à questão.

No entanto, há diferenças entre as imagens e os perceptos. A imagem mental desaparece, esvanece rapidamente, o que demanda esforço para mantê-la nítida. Ela pode ser gerada a partir de informações armazenadas na memória e também pode ser inspecionada, modificada, distendida e movimentada. Seriam essas características das imagens que permitiriam ao aluno, por exemplo, desenhar a planificação do paralelepípedo – seja diante do objeto (percepto) ou não. O desenho seria um registro de representação das imagens mentais produzidas pela ação de "desdobramento" de um paralelepípedo feito de cartolina, por exemplo.

Não há dúvidas de que para ensinar e aprender matemática é necessário recorrer a um conjunto de notações simbólicas, códigos, tabelas, gráficos e esquemas para representar os objetos matemáticos, os quais podem ser analisados sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. De acordo com Duval (2012), apesar de a apreensão dos objetos matemáticos ser conceitual, a atividade cognitiva sobre esses objetos só é possível por meio das representações semióticas.

Buscando elementos que caracterizam o pensamento matemático, Duval (2009) diferencia – apesar de não colocá-las em domínios distintos – as representações mentais das representações semióticas. As primeiras estariam pautadas nas conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. Já as representações semióticas seriam "produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação" (Duval, 2009, p.269). No entanto, o autor pondera que as representações semióticas não estão diretamente subordinadas às representações mentais e são, ainda, essenciais à atividade cognitiva do pensamento: elas desempenham um papel primordial no desenvolvimento das representações mentais (muitas representações mentais são representações semióticas interiorizadas), na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos.

Para que um sistema semiótico seja um registro de representação, ele necessita atender às características das três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose: formação, conversão e tratamento de uma representação.

A formação diz respeito ao modo de produção da representação de um registro. No caso da geometria, a figura é a principal forma de registro.

Já o tratamento de uma representação é a transformação desta representação internamente, utilizando regras de funcionamento, ou seja, dentro de um mesmo registro semiótico em que esta foi formada. Um exemplo de tratamento de registros seria representar um paralelepípedo planificado, já que é preciso obedecer a algumas regras específicas para o desenho: manter seis faces retangulares, unir as faces pelas arestas e não pelos vértices, observar o paralelismo das faces e manter a congruência destas, observar o número máximo de faces que se interceptam em um vértice etc.

Finalmente, a conversão de uma representação de um objeto matemático é a transformação desta em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte apenas do conteúdo da representação inicial. Esta seria uma transformação externa, em que se utiliza outro tipo de registro. No caso do paralelepípedo, determinar as áreas dos retângulos desenhados na planificação seria um exemplo de conversão do registro anterior das superfícies (retângulos) em números que indicam as medidas destas superfícies. O autor evidencia que a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento. Ela exige que as unidades significantes propostas para cada registro sejam bem descriminadas. A conversão não deve ser confundida nem com a codificação, nem com a interpretação – apesar dessas atividades estarem próximas.

Duval (2005; 2011), ao tratar as figuras como um registro de representação semiótica específico e não discursivo, busca explicar dois tipos gerais de operações mentais envolvidas na atividade geométrica. As primeiras se apoiam diretamente na percepção (operações mereológicas de reconfiguração) e as outras na desconstrução dimensional das formas *(nD →(n-1)D*, a qual permitiria "ver" matematicamente, ou seja, operar sobre "as formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel" (Duval, 2011, p.87). No caso de uma figura tridimensional *(3D),* a desconstrução se refere a identificar, por exemplo, as faces bidimensionais (*2D*) de um poliedro.

Na aprendizagem da matemática escolar, Duval (2012, p. 266) afirma que: "as transformações de representações em outras transformações semióticas estão no coração da atividade; as dificuldades dos alunos para compreender matemática surgem por conta da diversidade e complexidade dessas transformações".

Neste trabalho, não se pretende discutir o significado de semiótica, tampouco relacionar as teorias apresentadas. No entanto, vale evidenciar que Duval, ao levantar o debate sobre representações mentais e semióticas, refere-se à discussão proposta por Kosslyn (1995) e esclarece que "as imagens mentais apresentam condições de exploração e de discernimento dos detalhes representados semelhantes às da exploração perceptiva dos objetos reais" (Duval, 2009, p. 43). Acrescenta que:

> "a produção de imagens mentais depende de processos psíquicos ou psicológicos análogos aos que estão em jogo na percepção. A produção de representações semióticas, ao contrário, é submetida ao respeito de regras 'sintáticas' de formação e de tratamento das unidades significantes" (p. 49).

No entanto, as referidas produções não poderiam jamais ser consideradas independentes umas das outras. Para que as figuras geométricas (apresentadas ao aluno ou construídas por ele) possam ser tomadas como registros de representações semióticas, é necessário não apenas formar imagens mentais visuais, mas também adotar uma "maneira matemática de ver" (Duval, 2009, p.88). No primeiro caso, não haveria preocupação em reconhecer outras unidades figurais. No segundo, é o reconhecimento destas que permitirão as operações de tratamento e conversão que caracterizam o pensamento matemático direcionado à geometria.

3. Objetivos, sujeitos, procedimentos e instrumento

Esse trabalho teve por objetivos:

1) Analisar as representações semióticas produzidas por alunos do ensino básico em duas situações investigativas:
   a) tarefa de planificação de um paralelepípedo e
   b) solução de um problema envolvendo a área total de um paralelepípedo.
2) Verificar a existência de relações entre as representações produzidas por estudantes do nível fundamental e do médio nas duas situações investigativas.

Convém esclarecer que a comparação entre os dois grupos de estudantes busca apenas ilustrar os aspectos investigados, não sendo aqui estudadas as características que poderiam influenciar os resultados. A análise pretendida apoia-se em Duval, considerando que "a teoria dos registros é sua própria metodologia [já que] resulta primeiro da descrição da atividade matemática como transformação de representações semióticas" (Duval, 2011, p. 151). O autor defende que é importante considerar as produções de alunos em uma perspectiva de pesquisa, sejam elas colhidas no trabalho em sala de aula, sejam em questionários propostos para populações maiores. No entanto, o autor adverte para não confundir os dois tipos de análise: a análise matemática e a cognitiva. A primeira permite analisar as produções em função de conhecimentos específicos da área, mas verificar acertos e erros não permitiria entender as dificuldades dos alunos. A análise cognitiva, que consiste em decompor as soluções apresentadas em tratamentos e conversões segundo os registros mobilizados, contribui para compreender como o aluno articula conhecimentos em situações distintas.

Foram sujeitos 842 alunos do nono ano do ensino fundamental e da terceira série do ensino médio (Tabela 1) de escolas públicas de cidades situadas na região do Pontal de Minas Gerais [3], o que caracterizou uma amostra de conveniência. A escolha dessas séries se deu pelo fato de as mesmas indicarem os finais de dois níveis de ensino, entendendo que as experiências escolares pudessem influenciar nas representações.

Nível	Nº de suj.	%	Idade	Nº de suj.	%
9º ano EF	534	63,4	12 a 14	362	43,0
			15 a 17	425	50,5
3ª série EM	308	36,6	18 ou mais	55	6,5
Total	**842**	**100,0**	**Total**	**842**	**100,0**

Tabela 1. Distribuição dos sujeitos por idade e nível de ensino

O instrumento, tipo lápis e papel, foi aplicado individualmente aos sujeitos durante a aula e com prévia autorização do professor e da direção da escola.

Uma das questões solicitava o desenho de uma planificação do paralelepípedo, sendo antes apresentados dois exemplos de planificação do cubo. Os exemplos foram fornecidos para que o aluno verificasse que as planificações poderiam ser apresentadas de várias maneiras e concluísse que ele poderia escolher uma representação que achasse conveniente. A outra questão era composta por um problema envolvendo a área total de um paralelepípedo. A Figura 3 apresenta as questões do instrumento.

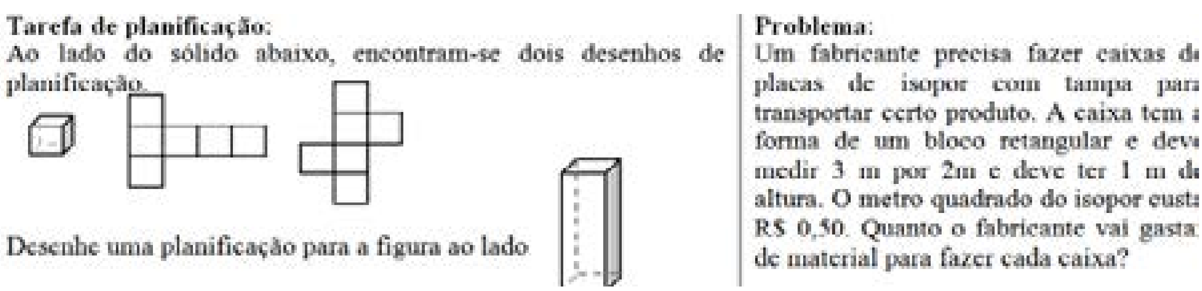

Figura 3. Questões constantes no instrumento de pesquisa

Convém esclarecer que a maioria das planificações e dos desenhos utilizados na solução dos problemas foi feita à mão livre, ou seja, sem a utilização de instrumentos de desenho. Assim, não foram considerados os erros de medidas ou a retidão das linhas que dependeriam desses instrumentos, mas as representações foram categorizadas de modo a identificar as relações espaciais estabelecidas, de acordo com as teorias anunciadas.

4. Resultados

Para analisar as representações semióticas produzidas na questão que solicitava a planificação do paralelepípedo, foram criadas três categorias: representações fracas, regulares e boas, descritas a seguir e com ilustrações constantes na Figura 4.

Representações fracas: nessa categoria, classificaram-se os desenhos da planificação do paralelepípedo que eram muito parecidos com o desenho da figura em perspectiva; em outras vezes, este era duplicado (*a*). Algumas planificações apresentavam faces do paralelepípedo em perspectiva (*b*) e havia desenhos que apresentavam retângulos de maneira desorganizada *(c)* ou em número exagerado *(d),* o que não permitiria a movimentação para se formar a figura ou levantaria dúvidas quanto às dobras que deveriam ser feitas, já que estas determinam as arestas e faces e consequentemente a montagem do paralelepípedo.

Representações regulares: os desenhos

ainda apresentavam falhas: faltavam faces (*e, f, g*), as medidas dos lados e ângulos não eram adequadas; em vários casos, a movimentação e a junção das faces seriam impossíveis (*h*).

Representações boas: as planificações tinham número correto de faces retangulares, mas ainda havia pequenos erros de medidas dos lados dos retângulos (*i*). Outras apresentavam corretamente os retângulos congruentes (quando estes correspondiam às faces opostas) apesar da não utilização de instrumentos de desenho, em alguns casos (*j, l, m*).

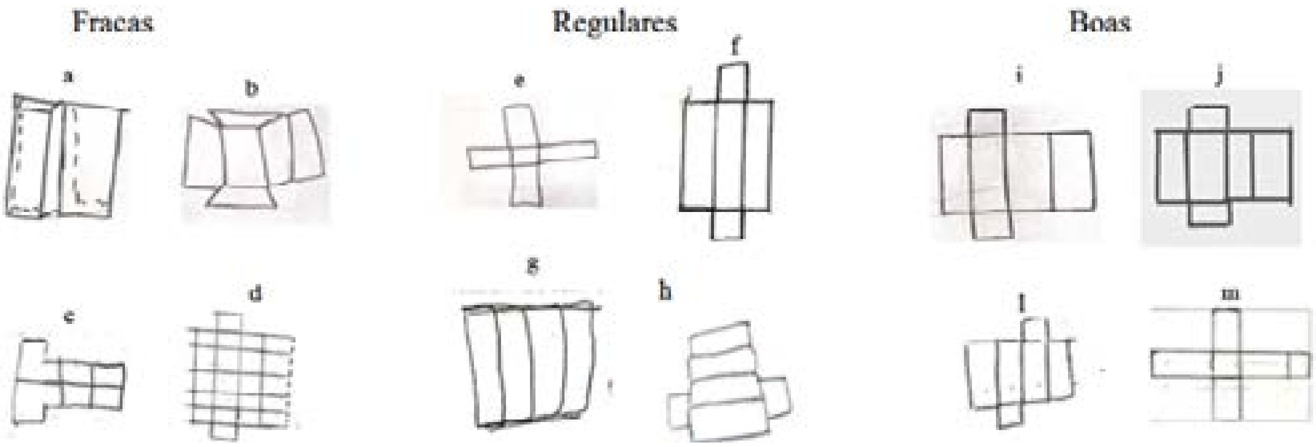

Figura 4. Exemplos de representações figurais produzidas na tarefa de planificação, por categorias.

A Tabela 2 mostra os resultados das análises para o total de sujeitos. A análise estatística mostrou que os sujeitos da 3ª série do ensino médio tenderam a produzir representações melhores que os do 9º ano do fundamental ($x^2(3,N = 842) = 40,038$; $p =0,000$).

Categorias	9º ano EF		3ª série EM		Total	
	Nº de suj.	%	Nº de suj.	%	Nº de suj.	%
Fracas	147	27,5	44	14,3	191	22,7
Regulares	79	14,8	26	8,4	105	12,5
Boas	175	32,8	161	52,3	336	39,9
Não resp.	133	24,9	77	25,0	210	24,9
Total	**534**	**100,0**	**308**	**100,0**	**842**	**100,0**

Tabela 2. Distribuição dos sujeitos por categorias de representação na tarefa de planificação

Para analisar as representações semióticas figurais produzidas no processo de solução do problema foram estabelecidas duas categorias: as figuras em perspectiva e as figuras planas. Alguns exemplos são mostrados na Figura 5. Nesta, podem ser verificados desenhos em perspectiva da caixa de isopor na forma de um paralelepípedo, alguns com a indicação das medidas corretas das arestas 3cm, 2cm e 1cm (*a, d, e, f*), outros sem as medidas (*b*) ou com indicação errada (*c*). Ainda na Figura 5, são mostrados os desenhos de figuras planas, em que podem ser observados retângulos com indicação de três medidas (*g, h, i, j*), de trapézios (*l, m*) e de retângulos subdivididos, duplicados, rabiscados, etc. (*n*). Não foi verificado nenhum desenho relativo à planificação do paralelepípedo.

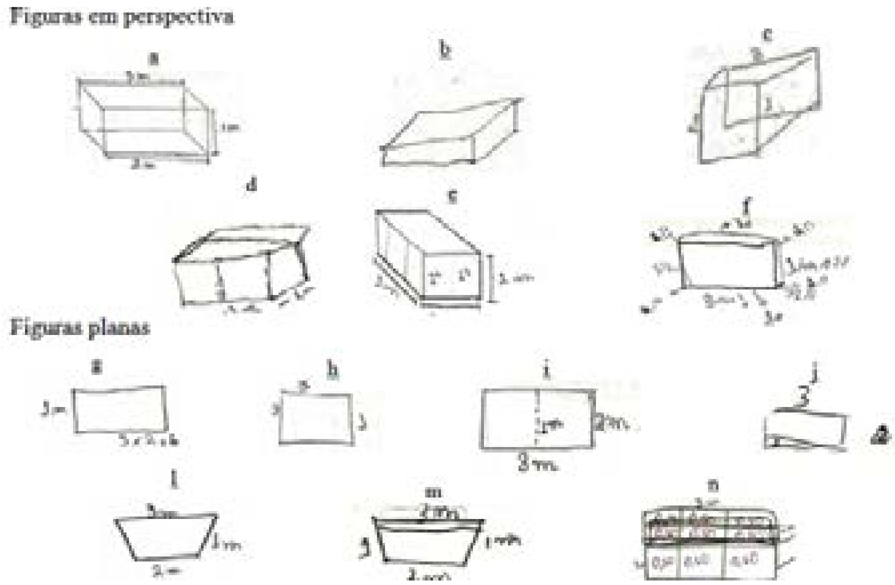

Figura 5. Representações semióticas figurais produzidas na solução do problema

A Tabela 3 mostra os resultados das análises para o total de sujeitos. A análise estatística mostrou que os sujeitos da 3ª série do ensino médio tiveram uma maior tendência em produzir desenhos em perspectiva que os do 9º ano do fundamental ($x^2(2,N = 842)=29,640;p =0,000$).

Representações semióticas	9º ano EF Nº suj.	%	3ª série EM Nº suj.	%	Total Nº suj.	%
Figuras em perspectiva	27	5,06	50	16,23	77	9,14
Figuras planas	60	11,24	34	11,04	94	11,16
Não registraram	447	83,70	224	72,7	671	79,70
Total	**534**	**100**	**308**	**100**	**842**	**100**

Tabela 3. Distribuição dos sujeitos por tipos de registros de representação pictórica

Testes estatísticos ($x^2(6,N = 842) = 655,193$; $p=0,000$) revelaram que existiu relação entre as representações semióticas figurais produzidas pelos sujeitos nas duas situações (planificação e problema). Assim, aqueles sujeitos cujas representações de planificação foram consideradas fracas tenderam a não produzir representações para o problema proposto e, quando o fizeram, valeram-se de desenhos de figuras planas. Já os sujeitos que elaboraram boas planificações tenderam a utilizar, para o problema, mais figuras em perspectiva que planas. Apesar destes últimos sujeitos terem se empenhado mais em solucionar o problema, verificou-se que a grande maioria não produziu representações e, quando as fizeram, não souberam calcular a área total do paralelepípedo – o que comprometeu a solução do problema. Várias representações produzidas evidenciaram o conhecimento de área de retângulo, conforme ilustram os desenhos *e* e *n* da Figura 5. Parece que a dificuldade dos sujeitos estava no estabelecimento das seis faces retangulares do paralelepípedo, necessário para a fase do processamento da informação geométrica. Assim, foi verificado que apenas seis sujeitos acertaram o problema, sendo três do ensino fundamental e três do ensino médio.

Os sujeitos que acertaram o problema combinaram figuras, números, esquemas e palavras, sendo verificados muitos rabiscos, flechas, etc. A Figura 6 mostra três exemplos de representações verificadas em soluções corretas do problema.

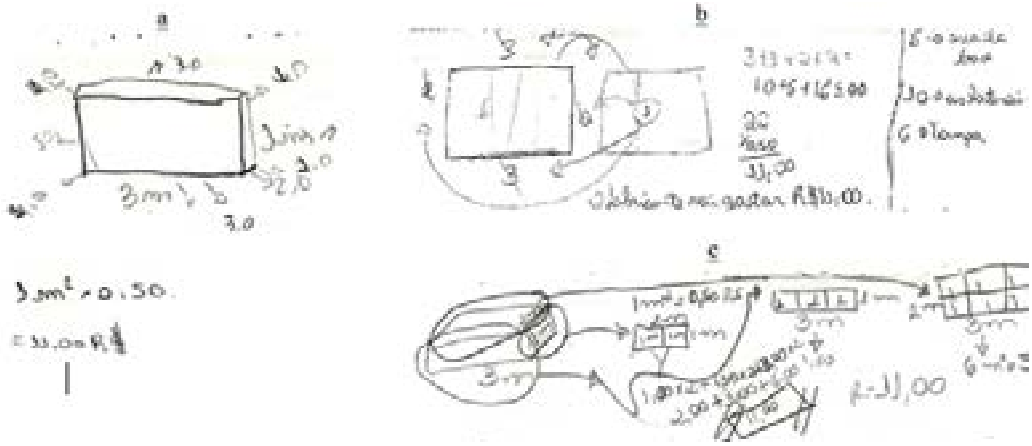

Figura 6. Representações semióticas de sujeitos que acertaram o problema.

5. Discussão dos resultados

Os resultados mostraram que o paralelepípedo foi planificado corretamente por cerca de 40% dos sujeitos. Interpretando os desenhos produzidos como registros de representação semiótica, é possível identificar algumas operações figurativas ligadas ao tratamento, conforme apontadas pela teoria. As figuras geométricas se distinguem de outras representações pelo fato de que “existem sempre várias maneiras de reconhecer as unidades figurais” (Duval, 2011, p. 86). Diante da figura desenhada do paralelepípedo, a tarefa exigia que os sujeitos a apreendessem em um primeiro nível (apreensão das unidades figurais) para, então, efetuar as modificações merealógicas e óticas que levam à desconstrução dimensional da forma. Após identificar as novas unidades figurais (não bastaria identificar as seis faces), a tarefa exigia que nova desconstrução fosse realizada: os retângulos tinham que ser “vistos” pelas unidades figurais que são os seus lados e ângulos para que o desenho final fosse coerente com a planificação correta.

A realização da operação de desconstrução dimensional pelos sujeitos que acertaram a planificação, com base em Kosslyn (1995), parece estar apoiada na formação da imagem mental do paralelepípedo (no caso, diante do percepto, isto é, do desenho dado em perspectiva) e na ativação dos subsistemas de codificação das propriedades espaciais: medidas e localização das faces além da ligação entre elas. Essa inspeção da imagem, associada ao esforço cognitivo de mantê-la nítida, deve ter permitido a movimentação, a modificação e o rebatimento das faces e sua representação em uma superfície única que é o plano de papel. É possível que os sujeitos tenham ativado os outros subsistemas sugeridos pelo autor, como buscar na memória as relações necessárias para o rebatimento e no sistema de busca do significado conceitual as experiências anteriores com o conceito de paralelepípedo. Nesse sentido, pode-se recorrer a Duval (2009), quando afirma que a figura é, muitas vezes, identificada por propriedades não vistas, porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade; “essas propriedades só podem ser aprendidas por conceitos” (Duval, 2009, p.91).

As planificações consideradas fracas parecem indicar que alguns sujeitos teriam empregado as operações figurais apenas em um primeiro nível, de apreensão perceptual, conforme apontado por Duval (2011). A movimentação da imagem do paralelepípedo deve ter permitido a identificação de faces, mas em número maior ou menor que o correto, com ligações equivocadas ou ainda mantendo-as em perspectiva – como se a ação mental não tivesse terminado. As porcentagens de representações fracas, tanto para o ensino fundamental, quanto para o médio, permite afirmar que o pensamento geométrico relacionado à planificação estava pouco desenvolvido para muitos sujeitos no contexto da pesquisa.

Analisando as representações semióticas figurais produzidas na primeira fase de solução do problema proposto, considerou-se que as figuras em perspectiva tinham, em sua maioria, coerência com as informações do problema, o que pode ser explicado pela “transparência” inerente dos registros. Os desenhos mostram, também, a tentativa dos sujeitos em desconstruir dimensionalmente a forma, demarcando as faces (*2D*) e também as medidas das arestas do paralelepípedo. Alguns sujeitos esboçaram a divisão da face em metros quadrados, o que indica identificação das unidades figurais e uma tentativa de conversão de registros.

Já os desenhos de figuras planas não estavam coerentes com as informações do problema – já que estas tratavam de uma caixa. Apesar disso, verificou-se que, em vários casos, os sujeitos valiam-se de um retângulo para representar o paralelepípedo, indicando as medidas 3cm e 2cm e, ao que parece, tentavam alocar a altura de 1cm em alguma posição intermediária do desenho – alguns o fazem no trapézio – mostrando, talvez, que identificavam mentalmente a terceira dimensão da figura, mas não conseguiam representá-la convenientemente. De acordo com Duval (2009, p. 85), as figuras permitem "ver" a realidade, mas sua reprodução depende das operações figurais que as caracterizam como registros de representação semiótica. Na perspectiva de Kosslyn (1995), seria necessário acessar o subsistema de busca do significado conceitual relativo ao paralelepípedo.

Nas soluções do problema, notam-se símbolos que foram utilizados para atualizar a atenção voltada a um objeto (rabiscos, flechas, traços). Eles demonstram as ações mais elementares envolvidas na formação dos registros e só têm interesse na medida em que são articulados nas representações de ordem superior (frases, figuras etc.). Estes símbolos são empregados não somente por razões de comunicabilidade, mas também para tornar possível o tratamento e a conversão.

Os resultados mostraram que os registros de representação, que foram tratados pelos sujeitos na primeira tarefa, não foram utilizados para fazer a conversão das superfícies em números que indicassem sua área. Todavia, os sujeitos que acertaram o problema formaram outros registros, realizaram um tratamento e conseguiram a conversão, por meio de uma reorganização de seus elementos. Além do sentido e da referência dos símbolos traçados, o conteúdo das representações indicou as atividades cognitivas essenciais na atividade matemática.

Conforme mostrou a análise estatística, aqueles sujeitos cujas representações de planificação foram consideradas fracas tenderam a não produzir representações para o problema proposto e, quando o fizeram, lançaram mão de desenhos de figuras planas, o que não contribuiu para a solução correta. Já os sujeitos que elaboraram boas planificações tenderam a utilizar, para o problema, mais figuras em perspectiva que planas, mas, como não conseguiram realizar o tratamento dessas representações, falharam na determinação da área total.

Com base na perspectiva de Duval (2009), que considera que os registros permitem identificar as variáveis relativas aos processos cognitivos que comandam a compreensão em matemática e que esta compreensão se situa no nível da coordenação de pelo menos dois registros, considera-se que, de modo geral, os sujeitos investigados, nas limitações desta pesquisa, não compreendiam os conceitos relativos à área total de paralelepípedo.

6. Considerações finais

Nas situações propostas pela pesquisa, a experiência de manipular objetos do cotidiano com a forma de um paralelepípedo – além daquela decorrente de um trabalho escolar mais específico – pode ter contribuído para o sujeito ativar os subsistemas referentes às imagens mentais e empregar as operações figurais na tarefa de planificação. No entanto, se esta experiência favoreceu a habilidade de planificar, parece que ela não contribuiu da mesma maneira para o sujeito empregar estratégias para a solução do problema proposto, já que somente seis alunos acertaram o problema.

Os sujeitos da pesquisa, mesmo aqueles que estavam cursando o final do ensino médio, não "transferiram" os desenhos de planificação para o cálculo da área total, nem se valeram das fórmulas para isso. Como quase todos erraram o problema. Entende-se que os sujeitos não teriam desenvolvido, convenientemente, o chamado pensamento geométrico, conforme sugerem os PCN (Brasil, 1998; 2000).

Verificou-se, por meio das representações, certa influência da capacidade de operar com imagens no desempenho das tarefas, o que está de acordo com o apontado na literatura recente (Dobarro & Brito, 2010; Pittalis & Christou, 2010). O trabalho confirma a dificuldade dos alunos na geometria espacial, o que tem sido identificado em vários trabalhos ligados ao tema (Proença & Pirola, 2009; 2011). Pesquisas são necessárias para investigar as representações de alunos relacionadas com a competência métrica, necessária para a solução de problemas em geometria. A análise dos registros de representações semióticas aqui esboçada permite realçar a importância de uma metodologia que permita verificar não apenas os erros dos estudantes, mas a atividade cognitiva específica da matemática, conforme pondera Almouloud (2011). Como implicações educacionais desse estudo, considera-se que, para o estudante desenvolver os conceitos e habilidades relativos à geometria espacial e também as competências para resolver problemas, a atividade matemática promovida nas escolas não pode prescindir de utilizar as mais variadas formas de representação, conforme argumenta Kaleff (2007). Além de se valer de vários tipos de figuras, as atividades devem levar os alunos a formar imagens, representá-las no papel ou na tela do computador e transferi-las para encaminhar as estratégias de solução de problemas.

Agradecimentos

A autora agradece à FAPEMIG e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Referências bibliográficas

Almouloud, S.A. (2011). Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: Machado, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em matemática*: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 125 – 148.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1991). Research into practice: Using spatial imagery in geometric reasoning. *Arithmetic Teacher, 39 (3),* 18 – 21.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal forResearch in Mathematics Education, 27 (3),* 258 – 292.

Brasil. (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC.

Brasil. (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Ensino Médio). Brasília: MEC.

Brasil. (2002). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) – Ciências da Natureza e suas Tecnologias.* Brasília: MEC.

Brasil. (2008). Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: *Prova Brasil*: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; INEP. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/saeb/matrizes-de-referencia-professor>. Acesso em 14 dez. 2014.

Brasil.(2009). Ministério da Educação. *Matriz de Referência para o Exame Nacional do Ensino Médio*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=310+enen.br> Acesso em 14 dez. 2014.

Brito, M. R. F. (2001). Contribuições da Psicologia Educacional à Educação Matemática. Em Brito, M. R. F. (org). *Psicologia da educação Matemática. Teoria e Pesquisa*. Florianóplolis: Insular.

Brito, M. R. F. (2006). Alguns Aspectos Teóricos e Conceituais da Solução de Problemas Matemáticos. In: Brito, M. R. F (org.). *Solução de Problemas e a Matemática Escolar.* Campinas: Alínea.

Clements, D.H. & Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grouws (Ed.),Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 420 – 464. New York: Macmillan.

Costa, A.L.P.; Pavanello, R.M. (2010). Geometria nas séries iniciais e a formação de professores em um cenário virtual de aprendizagem. *Anais,* Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador. Disponível em CD-Rom.

Dobarro, V. R.; Brito, M. R. F. (2010). Um estudo sobre a habilidade matemática na solução de problemas de geometria. *REnCiMa, 1, 1*, 34-46.

Duval, R. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. Grand N*, 76*, 7 – 27. Disponível em:
< http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/76/76n2.pdf >. Acesso em 14 dez 2014.

Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* (Levy, L. F.; Silveira, M. R. A., Trad.). São Paulo: Livraria da Física.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma:* entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. (Campos, T. M. M., Org.; Dias, M. A. D. Org.). São Paulo: PROEM.

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.* (Moretti, M. T., Trad.). Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, *07, 2*, p. 266 – 297.

Echeverria, M.P.P.; Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: Pozo, J. I.; Echeverria, M.P.P.; Castilho, J. D.; Crespo, M. A. G.; Angón, Y. P. *A solução de problemas:* aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed.

Elia, I.; Evangelou, K. (2013). Kindergarten teachers' use of semiotic resources in providing early learning experiences in geometry with a picture book as a didactical tool**.** In: Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 257 – 264. Kiel, Germany: PME.

Espírito Santo. Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo – SEDU-ES. *Matriz de referência de matemática* – Paebes-Alfa 1º ao 3º ano/série do Ensino Fundamental. Disponível em http://www.paebesalfa.caedufjf.net/wp-content/uploads/2013/07/Matriz_PAEBES_ALFA_MT.pdf

Flores, C.R.; Moretti, M. T. (2006). As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *Revemat- Revista Eletrônica de Educação Matemática - UFSC. 1*, 5 – 13.

Kaleff, A. M. R. (2007) Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. *Bolema, Rio Claro, 20, 28*, 69 – 94.

Kalogirou, P.; Elia, I. & Gagatsis, A. (2013).The relationship between visualization, spatial rotation, perceptualand operative apprehension. In: Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 129 – 136. Kiel, Germany: PME.

Kosslyn, S. M. (1995). *Image and Brain: The Resolution of the Imagery Debate.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Krutetsky, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lamonato, M.; Passos, C. L. B. (2009). Aprendizagens de professoras da educação infantil: possibilidades a partir da exploração-investigação em geometria. *Ciências & Cognição. 14 (2)*, 92 – 112. Disponível em: < http://www.cienciasecognicao.org/revista/index.php/cec/article/view/73> Acesso em 14 dez 2014.

Minas Gerais (2009).Secretaria de Estado de Educação. *Matrizes de Referência para Avaliação.* Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública. Matemática (Simave). Juiz de Fora: CAEd, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível em: http://www.educacao.mg.gov.br/component/gmg/page/15115-simave. Acesso em 14 dez 2014.

Moretti, M. T. (2011). A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação globas de propiedades figurais. In: Machado, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em matemática:* registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus. 149 – 160.

Nacarato, A. M.; Passos, C. L.B. (2003). *A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores*. São Carlos: EdUSFCar.

Paivio, A. (1969). Mental imagery in associative learning memory. *Psychological Review. 76, 3,* 241 – 23.

Pittalis, M.; Christow, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educ. Stud. Math. 75*, 191 – 212.

Proença, M. C. (2008). *Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio.* Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, SP.

Proença, M. C.; Pirola, N. A. (2009). Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono. Zetetiké. *17, 31,* 12 – 46. Disponível em: http://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/issue/view/194. Acesso em 14 dez 2014.

Proença, M. C.; Pirola, N. A. (2011). O conhecimento de polígonos e poliedros: uma análise do desempenho de alunos do ensino médio em exemplos e não-exemplos. *Ciência & Educação. 17, 1*, 199 – 217. Disponível em :< http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1516-73132011000100013&script=sci_abstract&tlng=pt>. Acesso em 14 dez 2014.

Rio de Janeiro (2008). Secretaria de Estado da Educação. *Revista do Professor de Avaliação:* Saerj-2008/Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. V. 1 (jan/dez. 2008), Juiz de Fora. Disponível em: http://www.avaliacaoexternasaerj.caedufjf.net/wp-content/uploads/2012/05/BoletimPedagogicoMat3AnoEMSAERJ2008.pdf . Acesso em 14 dez 2014.

São Paulo (2009). (Estado) Secretaria da Educação. *Matrizes de referência para a avaliação Saresp*: documento básico. Secretaria da Educação; Coordenação geral, Maria Inês Fini. São Paulo: SEE. Disponível em:< http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/subpages/provas.html> Acesso em 14 dez 2014.

Sternberg, R. J. (2000). *Psicologia Cognitiva.* (Osorio, M. R. B. Trad.). Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Tatsis, K.; Moutsios-Rentzos, A. (2013). Pre-service teachers describe geometrical figures: the 'broken phone' revisited. In: Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. . 265-272. Kiel, Germany: PME.

Viana, O. A. (2000). O conhecimento geométrico espacial de alunos do Cefam: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Viana, O. A. (2005). O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Viana, O. A. (2009). As imagens mentais e as habilidades para geometria espacial avaliadas por questões do ENEM. In: IV SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Anais..., Brasilia. Disponível em CD-Rom.

Viana, O. A. (2010). A avaliação em geometria espacial feita pelo Simave. Estudos em Avaliação Educacional (Impresso), 21, 505 – 528.

Viana, O. A. (2012). A identificação de propriedades e a habilidade de planificação de figuras geométricas espaciais. Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 5, Petrópolis, RJ, 2012, Anais... Disponivel em <http://www.sbem.com.br/files/v_sipem > acessado em 24 mai 2013.

Zhang, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. *Cognitive Science*. V.18, 87 122.

Notas

(1) A psicologia da educação matemática é uma área que integra o conhecimento acerca da estrutura da matemática e o conhecimento de como os indivíduos pensam, raciocinam e utilizam suas capacidades intelectuais, proporcionando, assim, os ingredientes para uma Psicologia aplicada à Matemática, conforme explica Brito (2001).

(2) A teoria é uma contribuição da ciência cognitiva à psicologia. A síntese teórica elaborada pelo autor compreende os estudos sobre algumas hipóteses acerca da representação mental do conhecimento: a hipótese do código dual (haveria dois sistemas básicos, independentes, mas interconectados, sendo um sistema simbólico e um sistema analógico), hipótese proposicional (as informações seriam codificadas e armazenadas em formas abstratas que se assemelham às proposições) e hipótese da equivalência funcional (embora não idênticas, a imaginação visual e a percepção visual seriam funcionalmente equivalentes). Nos estudos, foram utilizadas técnicas específicas de pesquisa psicobiológica elaboradas para possibilitar o estudo das relações entre o desempenho cognitivo e as estruturas cerebrais. Entre essas técnicas, destacam-se os estudos de caso de pacientes com lesão cerebral, as técnicas *in vivo* executadas em cérebros de macacos e as técnicas *in vivo* baseadas na glicose radioativa (tipo de tomografia). Além dessas técnicas, foram feitos outros experimentos para avaliar o comportamento. Evidentemente, este trabalho faz um pequeno recorte da teoria proposta pelo autor, sintetizada no livro *Image and brain: the resolution of the imagery debate* (Kosslyn, 1995). Trabalhos mais recentes do autor e de seus colaboradores podem ser vistos em http://www.wjh.harvard.edu/~kwn/KosslynArticles.html

(3) As cidades foram Ituiutaba, Capinópolis, Canápolis, Ipiaçu, Gurinhatã e Monte Alegre, todas situadas na região do Pontal de Minas Gerais, em que está inserida a Universidade Federal de Uberlândia, Campus Pontal.